b- • f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (produit des fonctions dérivables).

• $\forall x \geqslant 0$; $f'(x)=3x^2e^{1-x^2}+x^3(-2x)e^{1-x^2}=x^2e^{1-x^2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)$

d'où $\text{signe}[f'(x)] = \text{signe}\left[x^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)\right]; \forall x \geqslant 0$

par suite le tableau de variation de f est le suivant

x	0		a		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	−	
f(x)	0	↗	f(a)	↘	0

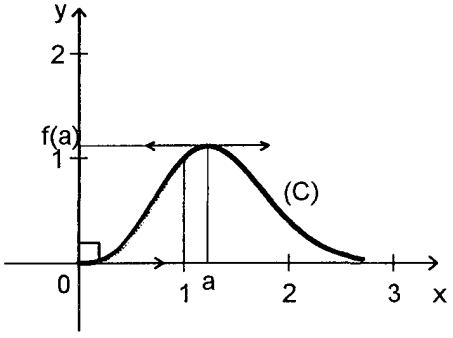
avec $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$f(a) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{-1}{2}}$

c- ◁ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

◁ $f'_d(0) = 0 \Rightarrow$ (C) possède en $O(0,0)$ une demi tangente horizontale

◁ $f'(a) = 0 \Rightarrow$ (C) possède en $A(a,f(a))$ une demi tangente horizontale



$a \approx 1,22$

$f(a) \approx 1,11$

2)a- $u_1=\int_0^1 xe^{1-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1(1-x^2)'e^{1-x^2}dx$

$= \frac{-1}{2}\left[e^{1-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e$

b- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant e^{1-x^2} \leqslant e$

$\Rightarrow x^n \leqslant x^ne^{1-x^2} \leqslant x^ne$

et comme les fonctions $(x \mapsto x^n)$; $(x \mapsto x^ne)$ et $\left(x \mapsto x^ne^{1-x^2}\right)$ sont continues sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 x^ndx \leqslant \int_0^1 x^ne^{1-x^2}dx \leqslant \int_0^1 x^nedx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{e}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$